ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT

L'épreuve comporte une partie de calcul numérique. Chaque candidat est prié de décrire sommairement (en 10 lignes environ) l'outil de calcul utilisé, qui peut être, au choix :

- calculatrice électronique (*marque, modèle*, nombre de registres, programmable ou non);
- table de logarithmes (auteur, précision de la table, pas de la tabulation);
- règle à calcul;
- table numérique (auteur, contenu, précision).

Il en sera tenu compte dans le barème de correction.

Les deux parties sont indépendantes.

I

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On note A une forme bilinéaire symétrique sur V (autrement dit, une application de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant aux relations $A(x, y) = A(y, x)$ et $A(\alpha x + \beta y, z) = \alpha A(x, z) + \beta A(y, z)$ pour x, y, z dans V et α, β dans $\mathbb{R}$). Soit aussi B une forme bilinéaire symétrique sur V telle que l'on ait $B(x, x) > 0$ pour x non nul dans V.

On pose :

$$(1) \qquad R(x) = \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \text{ dans V}$$

(« quotient de Rayleigh »).

1° Soient x_0 un élément non nul de V, et λ un nombre réel. Montrer que les *propriétés* suivantes sont équivalentes :

a. On a $R(x_0) = \lambda$, et la différentielle de R en x_0 est nulle (autrement dit, on a $dR(x_0 + ty)/dt = 0$ pour $t = 0$, quel que soit y dans V).

b. On a $A(x_0, y) = \lambda B(x_0, y)$ pour tout y dans V.

2° Montrer qu'il existe un couple (x_0, λ) satisfaisant aux conditions *a* et *b* précédentes (on pourra admettre qu'une fonction continue à valeurs réelles, définie dans une partie fermée et bornée K de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ atteint son minimum sur K).

3° Déduire de la question 2°, par récurrence sur la dimension n de V, qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que l'on ait $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ et la relation :

$$(2) \qquad R(x) = (\lambda_1 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2)/(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)$$

pour x non nul dans V, de la forme $\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ (les coefficients ξ_i étant des nombres réels). Déterminer tous les couples (x_0, λ) satisfaisant aux conditions *a* et *b* de la question 1°.

4° Soient f une forme linéaire non nulle dans V, et V' l'espace des solutions de l'équation $f(x) = 0$. Montrer qu'il existe une base $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ de V', et des nombres réels $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ tels que l'on ait $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ et la relation

$$(3) \qquad R(x') = (\mu_1 \eta_1^2 + \ldots + \mu_{n-1} \eta_{n-1}^2)/(\eta_1^2 + \ldots + \eta_{n-1}^2)$$

pour x' non nul dans V', de la forme $\eta_1 e'_1 + \ldots + \eta_{n-1} e'_{n-1}$.

5° Montrer que l'on a :

$$(4) \qquad \lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

(on pourra prouver que $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sont les racines du polynôme :

$$(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i)^2/(t - \lambda_i) \right).$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat lorsque n est égal à 2 ou 3.

. . . / . . .

E.N.S. SEVRES & ULM 1983

6° Soient (a_{ij}) et (b_{ij}) deux familles de nombres réels (avec $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$). On suppose qu'on a $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ quels que soient i et j, et les inégalités :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \xi_i\, \xi_j > 0$$

lorsque l'on a $n \geqslant 1$ et que les nombres réels $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ne sont pas tous nuls. On note $P_n(t)$ le déterminant de la matrice d'éléments $tb_{ij} - a_{ij}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$).

Par application de ce qui précède, montrer que $P_n(t)$ est de la forme $c_n (t - \lambda_{n,1}) \ldots (t - \lambda_{n,n})$ avec c_n non nul et une suite croissante (au sens large) de nombres réels $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,n}$.

Démontrer les formules d'encadrement

(5) $\lambda_{n,1} \leqslant \lambda_{n-1,1} \leqslant \lambda_{n,2} \leqslant \lambda_{n-1,2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n,n-1} \leqslant \lambda_{n-1,n-1} \leqslant \lambda_{n,n}$.

7° On pose $a_{ij} = T_{i+j-1}$ et $b_{ij} = T_{i+j-2}$ avec $T_n = \int_{-1}^{+1} x^n\, dx$ pour tout entier positif n. Déterminer les polynômes $P_n(t)$ et les nombres $\lambda_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 4$.

II

1° Montrer qu'il existe une suite de polynômes $B_0(x)$, $B_1(x)$, ..., et une seule, qui satisfasse aux relations suivantes :

(1) $$B_0(x) = 1$$

(2) $$dB_n(x)/dx = nB_{n-1}(x) \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

(3) $$\int_0^{+1} B_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

Soit b_n le terme constant du polynôme $B_n(x)$; on établira la formule

(4) $$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, b_{n-i}\, x^i,$$

où C_n^i désigne les coefficients binomiaux.

2° Démontrer la formule :

(5) $$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \qquad (\text{pour } n \geqslant 1),$$

et en déduire une formule de récurrence pour les nombres b_n. Au moyen de cette formule, calculer les nombres b_n pour $0 \leqslant n \leqslant 8$ (il peut être utile de prouver au préalable que b_n est nul pour $n \geqslant 3$ impair). Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+1} B_8(x)^2\, dx.$$

3° Si f est une fonction continue à valeurs complexes définie dans l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, on note $c_k(f)$ le k-ième coefficient de Fourier de f, égal à $\int_0^{+1} f(x)\, e^{-2\pi i k x}\, dx$; on admettra la formule de Parseval :

(6) $$\int_0^{+1} \bar{f}(x)\, g(x)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\bar{f})\, c_k(g)$$

f et g sont des fonctions continues sur $[0, 1]$ et $\bar{a}$ est le conjugué du nombre complexe a.

Calculer les coefficients de Fourier $c_k(B_n)$; en déduire le calcul des intégrales $\int_0^{+1} B_m(x)\, B_n(x)\, dx$ au moyen de la série de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ (qui converge lorsque l'on a $s > 1$).

4° De ce qui précède déduire la valeur de $\pi^{10}/\zeta(10)$ (c'est un nombre rationnel). En déduire une méthode de calcul de π, à 10^{-9} près, et mener à bien le calcul, si l'on dispose des moyens convenables.

5° On se propose de déterminer π par une variante de la *méthode d'Archimède*. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$a_n = \sin(\pi/2^n), \qquad b_n = \operatorname{tg}(\pi/2^n).$$

Partant de la relation $\sin(\pi/2) = 1$ et des formules qui expriment $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ en fonction de $\operatorname{tg}(x/2)$, calculer a_n et b_n pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

En déduire un encadrement de π au moyen des formules :

(7) $$2^n a_n \leqslant \pi \leqslant 2^n b_n.$$

Améliorer la précision obtenue en utilisant les inégalités

$$t - t^3/3 \leqslant 0 \leqslant t$$

$$t - t^3/3 + t^5/5 - t^7/7 \leqslant 0 \leqslant t - t^3/3 + t^5/5$$

valables pour $|\,0\,| < \pi/4$ et $t = \operatorname{tg} 0$.

Comparer avec le résultat de la question 4°.

FIN